УДК 514.763.7
DOI 10.21685/2072-3040-2016-3-3

А. А. Михеева

О СЕРДЦЕВИНЕ ГРУППОВОЙ ТРИ-ТКАНИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Дифференциальную геометрию многомерных три-тканей начал изучать в 1920-е гг. XX в. В. Бляшке, позднее С. Черн, М. А. Акивис и др. Особое место в теории многомерных три-тканей занимают ткани Бола, на которых естественным образом возникает структура симметрического пространства. Она определяется на базе одного из слоений ткани Бола с помощью некоторой бинарной операции, называемой сердцевиной этой ткани. В частности, такая операция возникает на групповой три-ткани $W(G)$, порождаемой группой Ли G. Сердцевина ткани Бола исследовалась в ряде работ, но ряд важных вопросов остался неизученным, в частности, не найден вид канонического разложения для сердцевины, не описаны ткани Бола с одной и той же сердцевиной. Цель настоящей работы – найти указанное каноническое разложение, описать свойства сердцевины групповой три-ткани, найти условия, характеризующие групповые три-ткани с изоморфными сердцевинами.

Материалы и методы. Для изучения сердцевины тканей Бола применяются методы классической дифференциальной геометрии, тензорное исчисление, модифицированный метод внешних форм и подвижного репера Эли Картана, используется теория групп Ли и результаты предыдущих работ.

Результаты. В работе найден канонический вид разложения в ряд Тейлора для сердцевины левой три-ткани Бола, вычислены соответствующие коммутатор и ассоциатор. Показано, как сердцевина групповой три-ткани $CW(G)$ выражается через групповую операцию в G; исходя из ряда Кэмпбелла – Хаусдорфа группы G найдено разложение в ряд для сердцевины. Доказано, что сердцевина $CW(G)$ эквивалентна сердцевине исходной групповой три-ткани $W(G)$; симметрическая связность, определяемая сердцевиной на базе первого слоения ткани $W(G)$, совпадает с третьей связностью Эли Картана на группе Ли G; правые сдвиги в группе являются автоморфизмами ее сердцевины. Получены условия, при которых две групповые три-ткани имеют общую сердцевину. Доказано, что группа G является нильпотентной высоты 1 тогда и только тогда, когда определяемая сердцевиной три-ткань $CW(G)$ является параллелизуемой. Рассмотрены сердцевины групповых три-тканей, порожденных группой аффинных преобразований на прямой и группой Гейзенберга.

Выводы. Оказалось, что тензор кручения сердцевины равен нулю в единице e координатной лупы, но тензор кривизны, вообще говоря, в e нулю не равен. Найдены условия, при которых две групповые ткани имеют общую сердцевину, что позволяет в будущих работах более детально изучить вопрос о свойствах групповых три-тканей с общей сердцевиной.

Ключевые слова: три-ткань, групповая три-ткань, три-ткань Бола, сердцевина три-ткани Бола.

A. A. Mikheeva

THE CORE OF THE GROUP THREE-WEB

Abstract.

Background. Wilhelm Blaschke began to study differential geometry of multidimensional three-webs in 1920s; S. Chern, M. A. Akivis and others studied the theory of multidimensional three-webs later. A special place in this theory is occupied by the Bol three-webs, on which the structure of symmetric space arises naturally. The structure is determined on the basis of one of the foliations of the Bol three-web using a binary operation, which is called the core of this three-web. In particular, this operation arises on group three-web $W(G)$, which is generated by Lie group G. The core of the Bol three-web has been investigated in several studies, but the number of important questions have not been studied, in particular, the canonical decomposition for the core has not been found, the Bol three-webs with the same core have not been described. The aims of this work are to find the canonical decomposition for the core, to describe the properties of the core of group three-webs, to find the conditions characterizing group three-webs with isomorphic cores.

Materials and methods. Methods of classical differential geometry, tensor calculus, the modified method of exterior differential forms and the moving frame of Elie Cartan were applied to study the core of the Bol three-webs; the theory of Lie groups and the results of the previous works were also used in the study.

Results. The canonical form of the expansion in the Taylor series for the core of the left Bol three-web has been found, the corresponding commutator and associator were calculated. It is shown how the core of group three-web $CW(G)$ is expressed through the group operation in G; by means of the Campbell-Hausdorff's formula of group G we have found a series expansion for the core. It is proved that 1) core $CW(G)$ is equivalent to the core of original group three-web $W(G)$; 2) the symmetric connection determined by the core on the basis of the first foliation of the web coincides with the Elie Cartan's third connection on the Lie group; 3) the right translations in the group are automorphisms of its core. The conditions, under which two group three-webs have the general core, have been received . It is proved that group G is a nilpotent of height 1 if and only if the three-web, determined by core, is parallelizable. Cores of group three-webs generated by the group of affine transformations on a straight line and the Heisenberg group have been considered.

Conclusions. It turned out that the torsion tensor of the core is equal to zero in a unit, but the curvature tensor, generally speaking, isn't equal to zero in a unit. The conditions, under which two group webs have the general core, have been found. It allows to carry out a more amply study of the question of properties of group three-webs with the general core in future works.

Key words: three-web, group three-web, Bol three-web, core of the Bol three-web.

Введение

Сердцевиной три-ткани Бола называется бинарная операция, которая естественным образом возникает на одном из семейств линий этой три-ткани. Понятие сердцевины средней три-ткани Бола ввел В. Д. Белоусов в [1] (см. также [2]).

В случае, если три-ткань Бола – многомерная три-ткань, образованная r-мерными слоениями на гладком многообразии размерности $2r$, то сердцевина является гладкой локальной квазигруппой и обладает дополнительным свойством – она определяет на базе одного из слоений ткани симметрическую структуру. Свойства сердцевины многомерной левой три-ткани Бола исследовались в работах [3–5].

Мы дополняем эти результаты, изучая свойства сердцевины $CW(G)$ произвольной групповой три-ткани $W(G)$, определяемой группой Ли G, и свойства три-ткани, для которой сердцевина $CW(G)$ является координатной квазигруппой (она обозначается также $CW(G)$). Мы показываем, как сердцевина $CW(G)$ выражается через групповую операцию в G; используя ряд Кэмпбела – Хаусдорфа группы G, мы находим разложение в ряд для операции в сердцевине $CW(G)$. При этом оказывается, что тензор кручения сердцевины равен нулю в единице группы G, но тензор кривизны, вообще говоря, в единице не равен нулю. Доказано, что сердцевина левой три-ткани Бола $CW(G)$ эквивалентна сердцевине исходной групповой три-ткани $W(G)$. Показано, что симметрическая связность, определяемая сердцевиной на базе первого слоения ткани $W(G)$, совпадает с третьей связностью Э. Картана на группе Ли G, порождающей эту ткань. Также доказано, что правые сдвиги в группе являются автоморфизмами ее сердцевины. Получены условия, при которых две групповые три-ткани имеют общую сердцевину. В заключение найдены сердцевины групповых три-тканей, порожденных группой аффинных преобразований на прямой и группой Гейзенберга.

1. Основные понятия

1.1. Три-тканью W на дифференцируемом многообразии M размерности $2r$ называется совокупность трех гладких слоений λ_1, λ_2 и λ_3 коразмерности r таких, что в каждой точке p многообразия M три проходящих через нее слоя находятся в общем положении.

Зададим слоения ткани W в некоторых локальных координатах на многообразии M уравнениями [6, с. 22]

$$\lambda_1 : x = \text{const}, \quad \lambda_2 : y = \text{const}, \quad \lambda_3 : z = f(x, y) = \text{const}, \tag{1.1}$$

где $x = (x^1, ..., x^r) \in X$, $y = (y^1, ..., y^r) \in Y$, $z = (z^1, ..., z^r) \in Z$, а функция $f = (f^1, ..., f^r)$ является гладкой и в каждой точке многообразия M удовлетворяет условиям $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \neq 0, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \neq 0$.

Уравнение $z = f(x, y)$ связывает параметры x, y и z слоев первого, второго и третьего слоений три-ткани W, проходящих через одну точку многообразия $M = X \times Y$, и называется уравнением три-ткани W. С другой стороны, это уравнение определяет локальную квазигруппу

$$(\cdot) : X \times Y \to Z, \quad z = f(x, y) \equiv x \cdot y \equiv xy, \tag{1.2}$$

которая называется координатной квазигруппой три-ткани W.

Параметры x, y и z допускают изотопические преобразования вида

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z),$$

где α, β, γ – локальные диффеоморфизмы. Тройка (α, β, γ) называется изотопическим преобразованием, или изотопией [6, с. 11]. Указанным изотопическим преобразованием уравнение (1.2) приводится к виду

$$\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \gamma(f(\alpha^{-1}(\tilde{x}), \beta^{-1}(\tilde{y}))).$$

Последнее определяет квазигруппу, изотопную (1.2). Три-ткани, определяемые изотопными квазигруппами f и $\tilde{f}$, являются эквивалентными.

В соответствии с [6, с. 23] продифференцируем уравнения (1.2), обозначим $\bar{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\tilde{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^k}$ и положим $\underset{1}{\omega}^i = \bar{f}^i_j dx^j$, $\underset{2}{\omega}^i = \tilde{f}^i_j dy^j$. Тогда в силу (1.1) слоения три-ткани W будут определяться уравнениями:

$$\lambda_1 : \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_2 : \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_3 : \underset{3}{\omega}^i \overset{def}{\equiv} \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

При этом формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям [6, с. 15]:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k,$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l. \tag{1.3}$$

Величины a^i_{jk} и b^i_{jkl} являются тензорами и называются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани W. Они вычисляются по известным формулам [6, с. 23]:

$$a^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}; \tag{1.4}$$

$$b^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^m}\bar{g}^m_k - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial y^m}\tilde{g}^m_l + \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{kj} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl}, \tag{1.5}$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l \partial y^m}\bar{g}^l_j \tilde{g}^m_k,$$

а $(\bar{g}^i_j)$ и $(\tilde{g}^i_j)$ – матрицы, обратные для $(\bar{f}^i_j)$ и $(\tilde{f}^i_j)$ соответственно. Формы ω^i_j вычисляются по формулам

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{kj}\underset{1}{\omega}^k + \Gamma^i_{jk}\underset{2}{\omega}^k. \tag{1.6}$$

Тензоры a^i_{jk} и b^i_{jkl} связаны обобщенным тождеством Якоби [6, с. 16]

$$b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|l]} = \frac{2}{3}\left(a^m_{jk}a^i_{ml} + a^m_{kl}a^i_{mj} + a^m_{lj}a^i_{mk}\right) \tag{1.7}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla a^i_{jk} \equiv da^i_{jk} - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k + a^m_{jk}\omega^i_m = b^i_{[j|l|k]}\underset{1}{\omega^l} + b^i_{[jk]l}\underset{2}{\omega^l}; \qquad (1.8)$$

$$\nabla b^i_{jkl} \equiv db^i_{jkl} - b^i_{mkl}\omega^m_j - b^i_{jml}\omega^m_k - b^i_{jkm}\omega^m_l + b^m_{jkl}\omega^i_m = \underset{1}{C}{}^i_{jklm}\underset{1}{\omega^m} + \underset{2}{C}{}^i_{jklm}\underset{2}{\omega^m}. \qquad (1.9)$$

При этом выполняются соотношения [6, с. 18]:

$$\underset{1}{C}{}^i_{j[k|l|m]} = b^i_{jpl}a^p_{km}, \quad \underset{2}{C}{}^i_{jk[lm]} = -b^i_{jkp}a^p_{lm},$$

$$\underset{1}{C}{}^i_{[jk]ml} - \underset{2}{C}{}^i_{[j|l|k]m} = a^i_{pj}b^p_{klm} - a^i_{pk}b^p_{jlm} + a^p_{jk}b^i_{plm}.$$

В уравнениях (1.8) и (1.9) через ∇ обозначен оператор ковариантного дифференцирования в аффинной связности Γ (связность Черна), которая определяется на многообразии M формами $(\underset{1}{\omega^i}, \underset{2}{\omega^i})$ и $\begin{pmatrix} \omega^i_j & 0 \\ 0 & \omega^i_j \end{pmatrix}$ [6, с. 25].

1.2. С каждой точкой $P=(a,b), (a,b)\in M$ из области определения три-ткани W связана локальная лупа[1] $l_P : Z\times Z \to Z$, которая называется координатной лупой этой ткани [6, с. 47]. Операция в l_P определяется формулой

$$u \circ v = R_b^{-1}(u)L_a^{-1}(v) = xy,$$

где $u = R_b(x) = xb$ и $v = L_a(y) = ay$ – правый и левый сдвиги в координатной квазигруппе (см. рис. 1, где слои первого, второго и третьего слоений ткани изображаются вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями соответственно).

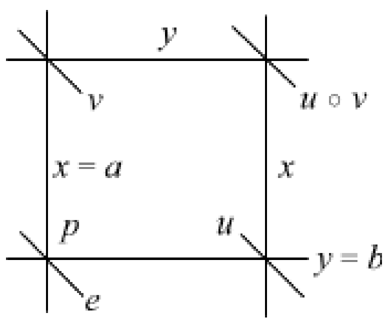

Рис. 1

В окрестности произвольной точки $P=(a,b)$ многообразия M ткани W можно ввести стандартную параметризацию [6, с. 57], при которой $a=0$ и $b=0$, т.е. точка P будет иметь нулевые координаты, а функция f будет удовлетворять условию $f(x,0)=x, f(0,y)=y$. Тогда координатная

[1] Квазигруппа с единицей.

квазигруппа становится лупой, $uv = u \circ v$, причем единица e лупы l_P будет иметь нулевые координаты.

Замечание. При стандартной параметризации слои ткани, пересекающиеся в точках «координатных слоев» $x = a$ и $y = b$, имеют одинаковый параметр (рис. 2).

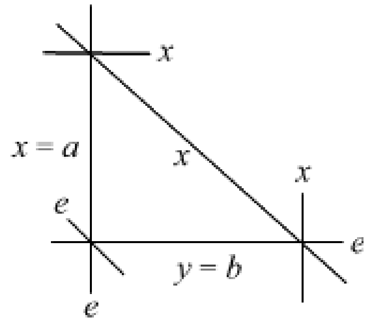

Рис. 2

При стандартной параметризации разложение функции uv в ряд Тейлора с точностью до членов четвертого порядка в окрестности точки $P(0,0)$ примет вид [6, с. 53]:

$$(uv)^i = u^i + v^i + \Lambda^i(u,v) + \frac{1}{2}M^i(u,u,v) + \frac{1}{2}N^i(u,v,v) + o^i(\rho^3), \qquad (1.10)$$

где

$$\Lambda^i(u,v) = \lambda^i_{jk}u^j v^k,\ M^i(u,u,v) = \mu^i_{jkl}u^j u^k v^l,\ N^i(u,v,v) = \nu^i_{jkl}u^j v^k v^l. \quad (1.11)$$

Многочленам $M^i(u,u,v)$ и $N^i(u,v,v)$ однозначно соответствуют трилинейные формы $M^i(u,v,w)$ и $N^i(u,v,w)$, причем $M^i(u,v,w) = M^i(v,u,w)$, а $N^i(u,v,w) = N^i(u,w,v)$.

Переменные u и v допускают синхронные линейные преобразования, при которых не меняется вид разложения (1.10). При этих преобразованиях величины $\lambda^i_{jk}, \mu^i_{jkl}, \nu^i_{jkl}$ меняются, вообще говоря, не по тензорному закону. Но из них можно получить тензоры следующим образом:

$$\alpha^i_{jk} = \lambda^i_{jk} - \lambda^i_{kj},\ \beta^i_{jkl} = \mu^i_{jkl} - \nu^i_{jkl} + \lambda^m_{jk}\lambda^i_{ml} - \lambda^i_{jm}\lambda^m_{kl}. \qquad (1.12)$$

С помощью этих тензоров в касательном пространстве T_e координатной лупы l_P три-ткани определяются бинарная и тернарная операции, которые называются соответственно коммутированием и ассоциированием:

$$[\xi,\eta]^i = \alpha^i_{jk}\xi^j\eta^k,\ (\xi,\eta,\zeta)^i = \beta^i_{jkl}\xi^j\eta^k\zeta^l,$$

или короче

$$[\xi,\eta] = A(\xi,\eta),\ (\xi,\eta,\zeta) = B(\xi,\eta,\zeta).$$

Обозначим $a(\xi,\eta)$ и $b(\xi,\eta,\zeta)$ полилинейные формы, определяемые тензорами кручения и кривизны три-ткани в точке P, тогда имеют место следующие равенства [6, с. 58]:

$$a(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}A(\xi,\eta),\ b(\xi,\eta,\zeta) = -B(\eta,\xi,\zeta). \qquad (1.13)$$

В силу тождества Якоби (1.7) получаем

$$alt(\xi,\eta,\zeta) = [[\xi,\eta],\zeta] + [[\eta,\zeta],\xi] + [[\zeta,\xi],\eta]. \qquad (1.14)$$

Согласно [6, с. 57] W-алгеброй называется линейное пространство, в котором определены две полилинейные операции: бинарная $[\xi,\eta]$ и тернарная (ξ,η,ζ), причем первая из них кососимметрична и эти операции связаны обобщенным тождеством Якоби (1.14). Таким образом, в касательном пространстве T_e координатной лупы l_P определена W-алгебра, которая называется касательной W-алгеброй три-ткани W в точке $P=(a,b)$. Расслоение этих алгебр называется касательной W-алгеброй ткани W.

В дальнейшем мы будем использовать каноническое разложение в ряд функции uv. Напомним, что в локальной аналитической лупе Q существуют канонические координаты u^i, в которых выполняются соотношения $(uu)^i = 2u^i$ [6, с. 60]. В канонических координатах разложение (1.10) бинарной операции в лупе l_P принимает вид

$$uv = u + v + A(u,v) + \frac{1}{2}M(u,u,v) + \frac{1}{2}N(u,v,v) + \frac{1}{6}P(u,u,u,v) +$$

$$+\frac{1}{4}Q(u,u,v,v) + \frac{1}{6}R(u,v,v,v) + o(\rho^4), \qquad (1.15)$$

причем

$$A(u,u) = 0,\ M(u,u,u) + N(u,u,u) = 0,$$

$$\frac{1}{6}P(u,u,u,u) + \frac{1}{4}Q(u,u,u,u) + \frac{1}{6}R(u,u,u,u) = 0. \qquad (1.16)$$

Заметим, что вторая из формул (1.12) теперь может быть записана в виде

$$B(u,v,w) = M(u,v,w) - N(u,v,w) + A(A(u,v),w) - A(u,A(v,w)). \qquad (1.17)$$

2. Левые три-ткани Бола

Три-ткань W называется левой три-тканью Бола и обозначается B_l, если на ней замыкаются все достаточно малые левые конфигурации Бола (B_l), изображенные на рис. 3 [6, с. 46].

Для изучения левых тканей Бола используем связность $\tilde{\Gamma}_{23}$ из пучка $\gamma(W)$ связностей, присоединенных к три-ткани W [7]. Связность $\tilde{\Gamma}_{23}$ определяется формами

$$\underset{1}{\omega}^i, \quad \tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^k . \qquad (2.1)$$

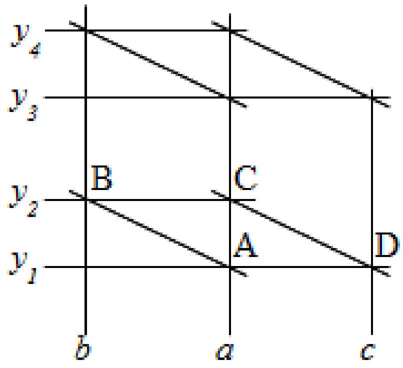

Рис. 3

С учетом равенств (2.1) структурные уравнения (1.3) ткани W примут вид

$$d \underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j, \quad d \underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k,$$

$$d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + (a^i_{jm} a^m_{kl} - a^m_{jk} a^i_{ml} + b^i_{[j|k|l]}) \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l + b^i_{(jk)l} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \qquad (2.2)$$

где $b^i_{(jk)l} = \frac{1}{2}(b^i_{jkl} + b^i_{kjl})$. Из уравнений (2.2) следует, что формы $\underset{1}{\omega}^i, \tilde{\omega}^i_j$ определяют на базе первого слоения три-ткани W аффинную связность (обозначим ее $\tilde{\Gamma}$) в том и только в том случае, если выполняются условия

$$b^i_{(jk)l} = 0. \qquad (2.3)$$

Условия (2.3) характеризуют левую три-ткань Бола [6, с. 98]. Из (2.2) в силу (1.7) и (2.3) получаем структурные уравнения ткани B_l в виде

$$d \underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j, \quad d \underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k,$$

$$d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \tilde{R}^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l, \qquad (2.4)$$

причем величины

$$\tilde{R}^i_{jkl} = \frac{1}{4}\left(b^i_{klj} - 2a^i_{mj} a^m_{kl}\right) \qquad (2.5)$$

образуют тензор кривизны связности $\tilde{\Gamma}$.

Из (1.9) следует, что $\tilde{\nabla}\tilde{R}^i_{jkl} = 0$, т.е. тензор $\tilde{R}^i_{jkl}$ является ковариантно постоянным (здесь $\tilde{\nabla}$ – оператор ковариантного дифференцирования в связности $\tilde{\Gamma}$). Следовательно, связность $\tilde{\Gamma}$, индуцируемая левой тканью

Бола B_l (и только такой тканью) на базе ее первого слоения, является локально симметрической связностью[1] [8, 9].

Каноническое разложение в ряд (1.15) для левых тканей Бола имеет свою специфику.

Лемма 2.1. Пусть (1.15) – каноническое разложение для лупы левой три-ткани Бола, тогда выполняются следующие соотношения:

$$M(u,u,u) = N(u,u,u) = 0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Как было отмечено выше, левая ткань Бола характеризуется условиями (2.3): $b(\xi,\eta,\zeta) + b(\eta,\xi,\zeta) = 0,$ что в силу (1.13) дает

$$B(\xi,\eta,\zeta) + B(\eta,\xi,\zeta) = 0.$$

Отсюда, сменив обозначения, получим $B(u,u,u) = 0.$ Полагая в (1.17) $u = v = w$, с учетом последнего равенства найдем

$$M(u,u,u) - N(u,u,u) = 0.$$

Сравнивая со вторым равенством из (1.16), получим (2.6).

3. Сердцевина левой три-ткани Бола

Дадим важное для дальнейших рассуждений определение сердцевины ткани B_l. Как видно из рис. 3, на три-ткани B_l положение слоя c однозначно определяется заданием слоев a и b. Бинарная операция

$$(*) : X \times X \to X, \quad c = a * b, \tag{3.1}$$

где a, b, c – слои первого слоения, входящие в произвольную левую конфигурацию Бола на три-ткани B_l, называется сердцевиной этой ткани и обозначается CB_l.

Напомним, что уравнение три-ткани $z = f(x, y)$ связывает параметры линий ткани, проходящих через одну точку. Поэтому для ткани B_l, заданной уравнением (1.2), уравнение сердцевины получается из равенств

$$f(a, y_1) = f(b, y_2), \quad f(c, y_1) = f(a, y_2), \quad a, b, c \in X, \quad y_1, y_2 \in Y,$$

соответствующих замыканию на ткани левых конфигураций Бола.

Исключая из этих равенств параметр y_2, получим соотношение

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y_1))) = f(c, y_1), \quad a, b, c \in X, \tag{3.2}$$

которое должно быть тождеством относительно y_1. Отсюда находим уравнение сердцевины $c = a * b$.

Соотношение (3.2) можно упростить. Введем в окрестности точки P стандартную параметризацию. Тогда координатная квазигруппа f станет лупой с единицей e. Положив в (3.2) $y_1 = e$ (см. замечание в п. 1.2), получим

[1] Аффинная связность без кручения и с ковариантно постоянным тензором кривизны.

$$c = a * b = f(a, f^{-1}(b,a)). \tag{3.3}$$

Отметим некоторые свойства сердцевины $(*)$.

1. Согласно [8] сердцевина (3.3) обладает свойствами идемпотентности ($a * a = a$), левой обратимости ($a*(a*b) = b$) и левой дистрибутивности ($a*(b*c) = (a*b)*(a*c)$). Отсюда вытекает, что она изотопна некоторой левой лупе Бола [10].

2. Сердцевина $(*)$ порождает на базе X первого слоения ткани локально симметрическую структуру, которая задается семейством гладких функций S_a таких, что $S_a(b) = a*b$ для любых $a \in X$ и $b \in U_a \subset X$, где U_a – достаточно малая окрестность точки a [9].

Пусть операция в координатной лупе l_P задана каноническим разложением (1.15). Найдем разложение в ряд Тейлора для сердцевины (3.3) в точке P (см. замечание в п. 1.2).

Предложение 3.1. Разложение в ряд Тейлора для сердцевины $c = a*b$ в окрестности точки $P(0,0)$ с точностью до членов четвертого порядка имеет вид

$$c = a + b + \frac{1}{2}M^*(a,a,b) + \frac{1}{2}N^*(a,b,b) + o\left(\rho^3\right), \tag{3.4}$$

где

$$M^*(a,a,b) = -\frac{1}{2}A(a, A(a,b)) + \frac{1}{4}M(a,a,b) + \frac{1}{2}N(a,a,b) + \frac{1}{4}N(b,a,a),$$

$$N^*(a,b,b) = -A(b, A(a,b)) - \frac{1}{2}M(b,b,a) + N(b,b,a) + \frac{1}{2}N(a,b,b). \tag{3.5}$$

Доказательство. В (3.3) произведем замену:

$$f^{-1}(b,a) = p. \tag{3.6}$$

Тогда $a = f(b,p)$, и в силу (1.15) имеем

$$a = f(b,p) = b + p + A(b,p) + \frac{1}{2}M(b,b,p) + \frac{1}{2}N(b,p,p) + o\left(\rho^3\right).$$

Выразим из найденного соотношения переменную p. Учитывая симметричность величин M и N, (1.16), (1.17), (2.6), с точностью до членов четвертого порядка получим

$$p = a - b - A(b,p) - \frac{1}{2}M(b,b,p) - \frac{1}{2}N(b,p,p) - o\left(\rho^3\right) = a - b - A(b, a - b -$$

$$- A(b, a-b)) - \frac{1}{2}M(b,b,a-b) - \frac{1}{2}N(b,a-b,a-b) + \tilde{o}\left(\rho^3\right) = a - b - A(b,a) +$$

$$+ A(b, A(b,a)) - \frac{1}{2}M(b,b,a) - \frac{1}{2}N(b,a,a) + \frac{1}{2}N(b,a,b) + \frac{1}{2}N(b,b,a) + \tilde{o}\left(\rho^3\right) =$$

$$= a - b + A(a,b) - A(b, A(a,b)) - \frac{1}{2}M(b,b,a) - \frac{1}{2}N(b,a,a) + N(b,b,a) + \tilde{o}\left(\rho^3\right).$$

С учетом обозначения (3.6) формула (3.3) примет вид $c = f(a, p)$. Используя разложение для p, находим

$$c = f(a,p) = a + p + A(a,p) + \frac{1}{2}M(a,a,p) + \frac{1}{2}N(a,p,p) + o\left(\rho^3\right) = a + (a - b +$$

$$+ A(a,b) - A(b, A(a,b)) - \frac{1}{2}M(b,b,a) - \frac{1}{2}N(b,a,a) + N(b,b,a)) + A(a, a - b +$$

$$+ A(a,b)) + \frac{1}{2}M(a,a,a-b) + \frac{1}{2}N(a,a-b,a-b) + \overline{o}\left(\rho^3\right) = 2a - b + A(a,b) -$$

$$- A(b, A(a,b)) - \frac{1}{2}M(b,b,a) - \frac{1}{2}N(b,a,a) + N(b,b,a) - A(a,b) + A(a, A(a,b)) -$$

$$- \frac{1}{2}M(a,a,b) - \frac{1}{2}N(a,a,b) - \frac{1}{2}N(a,b,a) + \frac{1}{2}N(a,b,b) + \overline{o}\left(\rho^3\right).$$

Приведя подобные члены, получим

$$c = 2a - b + A(a, A(a,b)) - A(b, A(a,b)) - \frac{1}{2}M(a,a,b) - N(a,a,b) - \frac{1}{2}N(b,a,a) -$$

$$- \frac{1}{2}M(b,b,a) + N(b,b,a) + \frac{1}{2}N(a,b,b) + \overline{o}\left(\rho^3\right).$$

Первые члены полученного разложения для сердцевины приведем к стандартному виду (см. (1.15)). Для этого сделаем замену $2a \to \hat{a}, -b \to \hat{b}$, тогда

$$c = \hat{a} + \hat{b} - \frac{1}{4}A\left(\hat{a}, A(\hat{a},\hat{b})\right) - \frac{1}{2}A\left(\hat{b}, A(\hat{a},\hat{b})\right) + \frac{1}{8}M\left(\hat{a},\hat{a},\hat{b}\right) + \frac{1}{4}N\left(\hat{a},\hat{a},\hat{b}\right) +$$

$$+ \frac{1}{8}N\left(\hat{b},\hat{a},\hat{a}\right) - \frac{1}{4}M\left(\hat{b},\hat{b},\hat{a}\right) + \frac{1}{2}N\left(\hat{b},\hat{b},\hat{a}\right) + \frac{1}{4}N\left(\hat{a},\hat{b},\hat{b}\right) + \hat{o}\left(\rho^3\right).$$

Введя обозначения (3.5), придем к (3.4).

Обозначим коммутатор и ассоциатор сердцевины (*) A^* и B^* соответственно.

Следствие 3.1. Пусть B_l – левая ткань Бола, CB_l – ее сердцевина. Тогда коммутатор сердцевины равен нулю, а ее ассоциатор выражается через коэффициенты ряда Тейлора ткани B_l следующим образом:

$$B^*(u,v,w) = -\frac{1}{4}A(u, A(v,w)) + \frac{1}{2}A(A(u,v),w) - \frac{3}{4}A(v, A(u,w)) -$$

$$- \frac{1}{4}M(u,v,w) + \frac{3}{2}N(u,v,w) + \frac{3}{4}N(v,u,w). \quad (3.7)$$

Доказательство. Так как в разложении (3.4) нет членов второго порядка, то $A^*(u,v)=0$. Найдем B^* с помощью формулы (1.17):

$$B^*(u,v,w)=M^*(u,v,w)-N^*(u,v,w)+A^*(A^*(u,v),w)-A^*(u,A^*(v,w)).$$

Так как $A^*(u,v)=0$, то

$$B^*(u,v,w)=M^*(u,v,w)-N^*(u,v,w). \tag{3.8}$$

Распишем $M^*(u,v,w)$ и $N^*(u,v,w)$ с помощью (3.5). Имеем

$$M^*(u,v,w)=-\frac{1}{4}A(u,A(v,w))-\frac{1}{4}A(v,A(u,w))+\frac{1}{4}M(u,v,w)+$$

$$+\frac{1}{4}N(u,v,w)+\frac{1}{4}N(v,u,w)+\frac{1}{4}N(u,v,w)=-\frac{1}{4}A(u,A(v,w))-$$

$$-\frac{1}{4}A(v,A(u,w))+\frac{1}{4}M(u,v,w)++\frac{1}{2}N(u,v,w)+\frac{1}{4}N(v,u,w);$$

$$N^*(u,v,w)=\frac{1}{2}A(A(u,v),w)+\frac{1}{2}A(A(u,w),v)-\frac{1}{2}M(u,v,w)+$$

$$+\frac{1}{2}N(u,v,w)+\frac{1}{2}N(v,u,w)+\frac{1}{2}N(u,v,w)=\frac{1}{2}A(A(u,v),w)+$$

$$+\frac{1}{2}A(A(u,w),v)-\frac{1}{2}M(u,v,w)+N(u,v,w)+\frac{1}{2}N(v,u,w).$$

Подставив найденные выражения для $M^*(u,v,w)$ и $N^*(u,v,w)$ в (3.8), получим (3.7).

4. Групповые три-ткани

Пусть G – группа Ли размерности r с операцией $z=f(x,y)=xy$ и X – прямое произведение $G\times G$. Через произвольную точку (a,b) из X проходят три слоя: $(x,y):x=a,(x,y):y=b,(x,y):xy=ab$, которые, очевидно, находятся в общем положении. Поэтому слоения $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ и $xy=\text{const}$ образуют на X три-ткань, которую называют групповой тканью и обозначают $W(G)$. Согласно [6, с. 46] групповая три-ткань характеризуется замыканием всех достаточно малых конфигураций Рейдемейстера R, изображенных на рис. 4. Координатной квазигруппой групповой три-ткани является исходная группа Ли G $z=f(x,y)=xy$, а операция в координатной лупе l_P определяется равенством (см. п. 1.2):

$$u\circ v=R_b^{-1}(u)L_a^{-1}(v)=xy,\ u=R_b(x)=xb, v=L_a(y)=ay,\ u,v\in Z, a\in X, b\in Y.$$

В силу свойств группы $x=ub^{-1}, y=a^{-1}v$, поэтому

$$u\circ v=xy=ub^{-1}a^{-1}v=u(ab)^{-1}v. \tag{4.1}$$

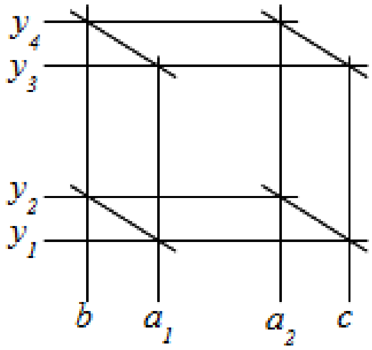

Рис. 4

В частности, если в (4.1) положить $ab = e$, то операция в лупах $l_P = l(a, a^{-1}), \forall\, a \in X$ совпадет с операцией в исходной группе.

Координатная лупа l_P групповой три-ткани является группой с единицей $e = ab$.

Пусть $W(G)$ групповая три-ткань, определенная на прямом произведении $X = G \times G$, где G – r-мерная группа Ли с единицей e [6, с. 20]. Положим $G_1 = (G, e)$, $G_2 = (e, G)$, причем операцию в группе G_1 оставим ту же, что и в группе G, а в G_2 введем сопряженную операцию $(\circ)$ по формуле $x \circ y = yx$. Тогда прямое произведение $G \times G$ превращается в группу с операцией «×»:

$$(x, y) \times (u, v) = (xu, y \circ v) = (xu, vy).$$

Ясно, что группы G_1 и G_2 являются подгруппами группы «×», а естественные вложения $i_1 : G \to G_1$, $i_1(x) = (x, e)$ и $i_2 : G(\circ) \to G_2$, $i_2(x) = (e, x)$ являются изоморфизмами.

Рассмотрим далее слой F_3 третьего слоения, проходящий через точку (e, e). Согласно определению он образован такими точками (x, y) из X, для которых выполняется условие $xy = e$. По определению операции $(\circ)$ имеем

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}. \tag{4.2}$$

Отсюда вытекает, во-первых, что слой F_3 является подгруппой группы «×», так как $(x, x^{-1}) \times (y, y^{-1}) = (xy, (y \circ x)^{-1})$. Обозначим эту группу G_3. Слои ткани $W(G)$, проходящие черех точку (a, b), представляют собой смежные классы вида $(a, b)G_1 = (ax, b)$, $(a, b)G_2 = (a, xb)$, $(a, b)G_3 = (ax, x^{-1}b)$.

Во-вторых, заметим, что слой F_3 является графиком биективного отображения $\Theta : G_1 \to G_2(\circ)$, $\Theta(x, e) = (e, x^{-1})$, которое в силу (4.2) будет изоморфизмом. Рассмотрим изомрфизм $\varphi : G_1 \to G_2(\circ)$, $\varphi(x) = x^{-1}$. Обозначим базисные левоинвариантные поля и дуальный базис левоинвариантных форм на группе G соответственно через e_i и ω^i, и пусть c^i_{jk} – структурный тензор этой группы. Тогда из определения сопряженной операции $(\circ)$ и формул, определяющих коммутатор, вытекает, что структурным тензором группы G (в тех же координатах) будет тензор $-c^i_{jk}$. Напомним, что структурный тензор определяется посредством коммутатора в касательной алгебре Ли группы $G:[e_i e_j]=c^i_{jk}e_k$. Обозначим базис и кобазис на X следующим образом:

$$di_1(e_i)=\underset{1}{e_i},\ di_2(e_i)=\underset{2}{e_i},\ \left(i_1^{-1}\right)^*(\omega^i)=\underset{1}{\omega^i},\ \left(i_2^{-1}\right)^*(\omega^i)=-\underset{2}{\omega^i}.$$

В результате структурные уравнения Маурера – Картана группы $X(\times)$ запишутся так:

$$d\underset{1}{\omega^i}=c^i_{jk}\underset{1}{\omega^j}\wedge\underset{1}{\omega^k},\quad d\underset{2}{\omega^i}=-c^i_{jk}\underset{2}{\omega^j}\wedge\underset{2}{\omega^k}. \tag{4.3}$$

Уравнения (4.3) являются структурными уравнениями рассматриваемой групповой три-ткани $W(G)$. Слоения ткани задаются вполне интегрируемыми системами $\underset{1}{\omega^i}=0,\ \underset{2}{\omega^i}=0$ и $\underset{1}{\omega^i}+\underset{2}{\omega^i}=0$, при этом $\omega^i_j=0$, $a^i_{jk}=c^i_{jk}$. Подставляя $\omega^i_j=0$ в структурные уравнения три-ткани (1.3), получим $b^i_{jkl}=0$. Последнее условие характеризует групповые три-ткани [6, с. 21].

5. Свойства сердцевины групповой три-ткани

1. Пусть $W(G)$ – групповая три-ткань, определяемая r-мерной группой Ли G с операцией $z=f(x,y)=xy$ и единицей e. Так как ткань $W(G)$ является также левой тканью Бола, то для нее определена сердцевина $c=a*b$. Найдем ее уравнение. Для этого запишем условия замыкания фигуры B_l с помощью операции умножения в ее координатной квазигруппе G. Тот факт, что точки A и B лежат на одной наклонной, выражается соотношением $ay_1=by_2$ (см. рис. 3). Для точек C и D соотношение имеет вид $cy_1=ay_2$. Отсюда $a=b\left(y_2y_1^{-1}\right)$, $c=a\left(y_2y_1^{-1}\right)$. Исключая $y_2y_1^{-1}$, получим: $b^{-1}a=a^{-1}c$, или

$$c=ab^{-1}a=a*b. \tag{5.1}$$

Непосредственно проверяем, что выполняются отмеченные выше свойства сердцевины $(*)$. Идемпотентность: $a*a=aa^{-1}a=a$. Левая обратимость: $a*(a*b)=a*(ab^{-1}a)=a(ab^{-1}a)^{-1}a=aa^{-1}ba^{-1}a=b$. Левая дистрибутивность:

$$a*(b*c)=a(b*c)^{-1}a=a(bc^{-1}b)^{-1}a=ab^{-1}cb^{-1}a=$$

$$=ab^{-1}aa^{-1}ca^{-1}ab^{-1}a=(ab^{-1}a)*(ac^{-1}a)=(a*b)*(a*c).$$

Предложение 5.1. Сердцевина $(*)$ изотопна левой лупе Бола.

Доказательство. Напомним [2], что лупа с операцией $(\circ)$ называется левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола: $u\circ(v\circ u))\circ w = u\circ(v\circ(u\circ w))$.

С помощью изотопического преобразования $a^2 \to u,\ b^{-1} \to v$ приведем уравнение (5.1) к виду

$$c = \sqrt{u}v\sqrt{u} = u\bullet v.$$

Очевидно, что квазигруппа $(\bullet)$ является лупой с единицей, так как в локальной группе Ли уравнение $x^2 = e$ имеет единственное решение $x = e$. В этой лупе левое тождество Бола выполняется. Действительно:

$$(u\bullet(v\bullet u))\bullet w = \sqrt{u\bullet(v\bullet u)}\ w\ \sqrt{u\bullet(v\bullet u)} = \sqrt{\sqrt{u}(v\bullet u)\sqrt{u}}\ w\ \sqrt{\sqrt{u}(v\bullet u)\sqrt{u}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{u}\sqrt{v}\ u\ \sqrt{v}\sqrt{u}}\ w\ \sqrt{\sqrt{u}\sqrt{v}\ u\ \sqrt{v}\sqrt{u}} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{u})(\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{u})}\ w\ \sqrt{(\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{u})(\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{u})} =$$

$$= \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{u}\ w\ \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{u};$$

$$u\bullet(v\bullet(u\bullet w)) = \sqrt{u}(v\bullet(u\bullet w)\sqrt{u} = \sqrt{u}\sqrt{v}(u\bullet w)\sqrt{u}\sqrt{v} = \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{u}\ w\ \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{u}.$$

Отсюда следует, что $(u\bullet(v\bullet u))\bullet w = u\bullet(v\bullet(u\bullet w))$.

Так как сердцевина CB_l является квазигруппой Бола, то она определяет некоторую левую три-ткань Бола, для которой эта сердцевина является координатной квазигруппой. Обозначим эту ткань тоже CB_l. Соответственно три-ткань с координатной квазигруппой (5.1) обозначим $CW(G)$. Как было отмечено (см. п. 3), операция $(*)$ порождает на базе X первого слоения ткани $CW(G)$ локально симметрическую структуру, которая задается семейством гладких функций $S_a(b) = a*b$ для любых $a\in X$ и $b\in U_a \subset X$, где U_a – достаточно малая окрестность точки a. Соответствующая симметрическая связность $\tilde{\Gamma}$ – аффинная связность без кручения и с ковариантно постоянным тензором кривизны.

Предложение 5.2. Для ткани $CW(G)$ симметрическая связность $\tilde{\Gamma}$ совпадает с третьей связностью Э. Картана на группе Ли G.

Доказательство. Напомним [11], что на многообразии группы Ли G Э. Картан ввел три способа параллельного переноса векторов и три аффинные связности, определяемые этими параллельными переносами. Параллельный перенос третьего рода определяется Картаном на группе G с помощью геодезической симметрии. Геодезическая симметрия S_x относительно точки x определяется равенством

$$S_x(y) = xy^{-1}x.$$

Соответствующая третья связность Э. Картана – аффинная связность без кручения и с ковариантно постоянным тензором кривизны. Как видно, это равенство совпадает с уравнением сердцевины (5.1), т.е. $S_x(y) = x * y$.

Для ткани CB_l также можно определить сердцевину, которая обозначается CCB_l. Согласно [3] ткань CCB_l эквивалентна ткани CB_l. Дадим непосредственное доказательство этого утверждения для ткани $CW(G)$.

Предложение 5.3. Три-ткани $CW(G)$ и $CCW(G)$ эквивалентны.

Доказательство. По предложению 5.1 $CW(G)$ является левой три-тканью Бола $\tilde{B}_l$, т.е. для нее определена сердцевина $CCW(G)$. Найдем ее уравнение из условий замыкания фигуры $\tilde{B}_l$ (ср. с рис. 2): $a * y = b * \hat{y}$, $c * y = a * \hat{y}$. Исключая из этих соотношений y, получим $a * (b * \hat{y}) = c * (a * \hat{y})$. Левую часть распишем по свойству левой дистрибутивности, в результате получим $(a * b) * (a * \hat{y}) = c * (a * \hat{y})$, откуда $a * b = c$. Таким образом, уравнение сердцевины $CCW(G)$ есть в точности уравнение сердцевины $CW(G)$.

Предложение 5.4. Правые сдвиги $R_x(z) = zx$ в группе G являются автоморфизмом ее сердцевины.

Доказательство. Обозначим $\tilde{a} = R_x(a), \tilde{b} = R_x(b), \tilde{c} = R_x(c),\ \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in Z$, тогда

$$\tilde{c} = R_x(c) = cx = (a * b)x = ab^{-1}ax = axx^{-1}b^{-1}ax =$$

$$= ax(bx)^{-1}ax = \tilde{a}\tilde{b}^{-1}\tilde{a} = \tilde{a} * \tilde{b} = R_x(a) * R_x(b).$$

2. В предложении 3.1 найдено разложение в ряд для сердцевины CB_l. Для сердцевины групповой ткани $CW(G)$ найдем каноническое разложение в ряд, используя формулу Кэмпбелла – Хаусдорфа.

Предложение 5.5. С точностью до членов четвертого порядка каноническое разложение в ряд операции в координатной лупе ткани $CW(G)$ в окрестности точки $P(0,0)$ имеет вид

$$c^i = x^i + y^i - \frac{1}{24} c^i_{(j|k|} c^k_{l)m} x^j x^l y^m + \frac{1}{12} c^i_{(k|j|} c^j_{m)l} x^l y^k y^m -$$

$$- \frac{1}{48} c^i_{(j|p|} c^p_{(k|q|} c^q_{l)m)} x^j x^m y^k y^l + \frac{1}{48} c^i_{(j|p|} c^p_{(k|q|} c^q_{l)m)} x^k x^l y^j y^m + o(\rho^4) \quad (5.2)$$

(в третьем и четвертом слагаемых у коэффициентов внутренние скобки означают суммирование по индексам k и l, а внешние – по индексам j и m).

Доказательство. Пусть сердцевина $CW(G)$ групповой три-ткани $W(G)$ задается уравнением вида (5.1): $c = x * y = xy^{-1}x$. Заменив здесь y^{-1} на $\hat{y}$, получим

$$c = x\hat{y}x = x \times \hat{y}.$$

Далее представим бинарную операцию $(\times)$ в координатной форме с помощью формулы Кэмпбелла – Хаусдорфа, определяющей операцию умножения в группе через операцию коммутирования в ее алгебре Ли. Напомним [12], что при стандартной параметризации в окрестности точки $P(0,0)$ с точностью до членов четвертого порядка эта формула имеет вид

$$xy = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}\left([x,[x,y]] + [y,[y,x]]\right) - \frac{1}{24}\left[y,[x,[x,y]]\right] + o(\rho^4),$$

где $[x,y]^i = c^i_{jk}x^j y^k$, c^i_{jk} – структурные константы группы G, x^j, y^k и $[x,y]^i$ – нормальные координаты соответствующих элементов в окрестности единицы. Тогда

$$c = x\hat{y}x = x\hat{y} + x + \frac{1}{2}[x\hat{y},x] + \frac{1}{12}\left([x\hat{y},[x\hat{y},x]] + [x,[x,x\hat{y}]]\right) -$$

$$-\frac{1}{24}\left[x,[x\hat{y},[x\hat{y},x]]\right] + o(\rho^4) = x + \hat{y} + \frac{1}{2}[x,\hat{y}] + \frac{1}{12}[x,[x,\hat{y}]] + \frac{1}{12}[\hat{y},[\hat{y},x]] -$$

$$-\frac{1}{24}\left[\hat{y},[x,[x,\hat{y}]]\right] + x + \frac{1}{2}\left[x + \hat{y} + \frac{1}{2}[x,\hat{y}] + \frac{1}{12}[x,[x,\hat{y}]] + \frac{1}{12}[\hat{y},[\hat{y},x]], x\right] +$$

$$+\frac{1}{12}\left[x + \hat{y} + \frac{1}{2}[x,\hat{y}], \left[x + \hat{y} + \frac{1}{2}[x,\hat{y}], x\right]\right] + \frac{1}{12}\left[x, \left[x, x + \hat{y} + \frac{1}{2}[x,\hat{y}]\right]\right] -$$

$$-\frac{1}{24}\left[x,[x+\hat{y},[x+\hat{y},x]]\right] + \hat{o}(\rho^4) = 2x + \hat{y} + \frac{1}{2}[x,\hat{y}] + \frac{1}{12}[x,[x,\hat{y}]] +$$

$$+\frac{1}{12}[\hat{y},[\hat{y},x]] - \frac{1}{24}\left[\hat{y},[x,[x,\hat{y}]]\right] + \frac{1}{2}[\hat{y},x] + \frac{1}{4}[[x,\hat{y}],x] + \frac{1}{24}\left[[x,[x,\hat{y}]],x\right] +$$

$$+\frac{1}{24}\left[[\hat{y},[\hat{y},x]],x\right] + \frac{1}{12}[x,[\hat{y},x]] + \frac{1}{12}[\hat{y},[\hat{y},x]] + \frac{1}{24}[[x,\hat{y}],[\hat{y},x]] +$$

$$+\frac{1}{24}\left[x,[[x,\hat{y}],x]\right] + \frac{1}{24}\left[\hat{y},[[x,\hat{y}],x]\right] + \frac{1}{12}[x,[x,\hat{y}]] + \frac{1}{24}\left[x,[x,[x,\hat{y}]]\right] -$$

$$-\frac{1}{24}\left[x,[x,[\hat{y},x]]\right] - \frac{1}{24}\left[x,[\hat{y},[\hat{y},x]]\right] + \hat{o}(\rho^4);$$

$$2x + \hat{y} + \frac{1}{2}[x,\hat{y}] + \frac{1}{12}[x,[x,\hat{y}]] + \frac{1}{12}[\hat{y},[\hat{y},x]] - \frac{1}{24}\left[\hat{y},[x,[x,\hat{y}]]\right] + \frac{1}{2}[\hat{y},x] +$$

$$+\frac{1}{4}[[x,\hat{y}],x] + \frac{1}{24}\left[[x,[x,\hat{y}]],x\right] + \frac{1}{24}\left[[\hat{y},[\hat{y},x]],x\right] + \frac{1}{12}[x,[\hat{y},x]] + \frac{1}{12}[\hat{y},[\hat{y},x]] +$$

$$+\frac{1}{24}[[x,\hat{y}],[\hat{y},x]] + \frac{1}{24}\left[x,[[x,\hat{y}],x]\right] + \frac{1}{24}\left[\hat{y},[[x,\hat{y}],x]\right] + +\frac{1}{12}[x,[x,\hat{y}]] +$$

$$+\frac{1}{24}\left[x,[x,[x,\hat{y}]]\right] - \frac{1}{24}\left[x,[x,[\hat{y},x]]\right] - \frac{1}{24}\left[x,[\hat{y},[\hat{y},x]]\right] + \hat{o}(\rho^4).$$

Приводя подобные члены, найдем

$$c = 2x + \hat{y} - \frac{1}{6}[x,[x,\hat{y}]] + \frac{1}{6}[\hat{y},[\hat{y},x]] +$$

$$+\frac{1}{12}\left[[\hat{y},[\hat{y},x]],x\right] - \frac{1}{12}\left[\hat{y},[x,[x,\hat{y}]]\right] + \hat{o}(\rho^4). \tag{5.3}$$

В (5.3) сделаем обратную замену $\hat{y} \to y^{-1}$. Так как в группе $yy^{-1} = e$, то с помощью формулы Кэмпбелла – Хаусдорфа получаем $y^{-1} = -y$. Тогда разложение примет вид

$$c = 2x - y + \frac{1}{6}[x,[x,y]] + \frac{1}{6}[y,[y,x]] +$$

$$+\frac{1}{12}\left[[y,[y,x]],x\right] - \frac{1}{12}\left[y,[x,[x,y]]\right] + \overline{o}(\rho^4).$$

Как видно, канонические (нормальные) координаты в группе G не являются каноническими для ее сердцевины, но, положив $2x = x, -y = y$, мы первые члены полученного разложения для операции (∗) приведем к стандартному виду (см. (1.15)):

$$c = x + y - \frac{1}{24}[x,[x,y]] + \frac{1}{12}[y,[y,x]] +$$

$$+\frac{1}{48}\left[[y,[y,x]],x\right] - \frac{1}{48}\left[y,[x,[x,y]]\right] + o(\rho^4). \tag{5.4}$$

Если переписать (5.4) в координатной форме, придем к (5.2).

Предложение 5.6. Значения основных тензоров три-ткани $CW(G)$ в окрестности точки $P(0,0)$ выражаются через структурные константы группы G следующим образом:

$$a^i_{jk} = 0, \qquad b^i_{jkl} = -\frac{1}{8}c^i_{lm}c^m_{jk},$$

$$\underset{1}{C}{}^i_{jklm} = -\frac{1}{12}c^i_{(k|p|}c^p_{(l|q|}c^q_{j)m)} + \frac{1}{12}c^i_{(j|p|}c^p_{(m|q|}c^q_{k)l)},$$

$$\underset{2}{C}{}^i_{jklm} = \frac{1}{12}c^i_{(k|p|}c^p_{(m|q|}c^q_{l)j)} - \frac{1}{12}c^i_{(l|p|}c^p_{(j|q|}c^q_{k)m)}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Положим в разложении (1.15)

$$A^i(u,v) = A^i_{jk}u^j v^k,\ M^i(u,u,v) = M^i_{jkl}u^j u^k v^l,$$

$$N^i(u,v,v) = N^i_{jkl}u^j v^k v^l,\ P^i(u,u,u,v) = P^i_{jklm}u^j u^k u^l v^m,$$

$$Q^i(u,u,v,v) = Q^i_{jklm}u^j u^k v^l v^m,\ R^i(u,v,v,v) = R^i_{jklm}u^j v^k v^l v^m.$$

Тогда, сравнивая полученное разложение (5.2) для сердцевины $CW(G)$ с разложением (1.15), находим

$$A^i_{jk}=0,\ M^i_{jkl}=-\frac{1}{12}c^i_{(j|m|}c^m_{k)l},\ N^i_{jkl}=\frac{1}{6}c^i_{(k|m|}c^m_{l)j}.$$

Подставляя эти выражения во вторую формулу (1.17), получим

$$B^i_{jkl}=M^i_{jkl}-N^i_{jkl}=-\frac{1}{12}c^i_{(j|m|}c^m_{k)l}-\frac{1}{6}c^i_{(k|m|}c^m_{l)j}=$$

$$=-\frac{1}{24}\left(c^i_{jm}c^m_{kl}+c^i_{(km}c^m_{jl)}\right)-\frac{1}{12}\left(c^i_{km}c^m_{lj}+c^i_{lm}c^m_{kj}\right)=$$

$$=-\frac{1}{24}c^i_{jm}c^m_{kl}+\frac{1}{24}c^i_{(km}c^m_{jl}-\frac{1}{12}c^i_{lm}c^m_{kj}=\frac{1}{24}c^i_{lm}c^m_{jk}+\frac{1}{12}c^i_{lm}c^m_{jk}=\frac{1}{8}c^i_{lm}c^m_{jk}.$$

Далее, используя соотношения (1.13), получим

$$a^i_{jk}=0,\ b^i_{jkl}=-\frac{1}{8}c^i_{lm}c^m_{jk}.$$

Согласно [6, с. 171] имеют место следующие формулы:

$$\underset{1}{C}{}^i_{jklm}=Q^i_{kmjl}-P^i_{kmjl}+a^i_{mp}b^p_{jkl}+a^i_{kp}b^p_{jml}-a^p_{mk}b^i_{jpl}+$$

$$+a^i_{pl}M^p_{kmj}-a^p_{jk}M^i_{pml}-a^p_{jm}M^i_{kpl}-a^p_{jl}M^i_{kmp};$$

$$\underset{2}{C}{}^i_{jklm}=R^i_{kjlm}-Q^i_{kjlm}+a^i_{pm}b^p_{jkl}+a^i_{pl}b^p_{jkm}-a^p_{lm}b^i_{jkp}-$$

$$-a^i_{kp}N^p_{jlm}+a^p_{kj}N^i_{plm}+a^p_{lj}N^i_{kpm}+a^p_{mj}N^i_{klp}. \tag{5.6}$$

Сравнивая разложения (5.2) и (1.15), найдем, что $P^i_{jklm}=R^i_{jklm}=0$, а

$$Q^i_{jklm}=-\frac{1}{12}c^i_{(j|p|}c^p_{(m|q|}c^q_{l)k)}+\frac{1}{12}c^i_{(l|p|}c^p_{(k|q|}c^q_{j)m)}.$$

Так как $a^i_{jk}=0$, формулы (5.6) примут вид (5.5).

3. В работе [13] найдены условия, при которых левые три-ткани Бола имеют общую сердцевину. Для групповых тканей верна следующая теорема.

Теорема 5.1. Если две групповые три-ткани $W(G_1)$ и $\overline{W}(G_2)$ имеют общую сердцевину, то имеют место следующие равенства:

$$c^i_{lm}c^m_{jk}=\overline{c}^i_{lm}\overline{c}^m_{jk},$$

$$-c^i_{(k|p|}c^p_{(l|q|}c^q_{j)m)}+c^i_{(j|p|}c^p_{(m|q|}c^q_{k)l)}=-\overline{c}^i_{(k|p|}\overline{c}^p_{(l|q|}\overline{c}^q_{j)m)}+\overline{c}^i_{(j|p|}\overline{c}^p_{(m|q|}\overline{c}^q_{k)l)},$$

$$c^i_{(k|p|}c^p_{(m|q|}c^q_{l)j)}-c^i_{(l|p|}c^p_{(j|q|}c^q_{k)m)}=\overline{c}^i_{(k|p|}\overline{c}^p_{(m|q|}\overline{c}^q_{l)j)}-\overline{c}^i_{(l|p|}\overline{c}^p_{(j|q|}\overline{c}^q_{k)m)}, \tag{5.7}$$

где c^i_{jk} и $\overline{c}^i_{jk}$ – структурные константы групп G_1 и G_2, определяющих групповые ткани $W(G_1)$ и $\overline{W}(G_2)$ соответственно.

Доказательство. Рассмотрим две групповые три-ткани $W(G_1)(\cdot)$ и $\overline{W}(G_2)(\circ)$. Для каждой групповой ткани можно определить сердцевину. Пусть $CW(G_1)(*)$ – сердцевина три-ткани $W(G_1)(\cdot)$, а $C\overline{W}(G_2)(\times)$ – сердцевина $\overline{W}(G_2)(\circ)$.

Пусть $W(G_1)(\cdot)$ и $\overline{W}(G_2)(\circ)$ имеют общую сердцевину, тогда $CW(G_1)(*)$ и $C\overline{W}(G_2)(\times)$ изоморфны, т.е. существует отображение $\varphi : CW(G_1)(*) \to C\overline{W}(G_2)(\times)$ такое, что $\varphi(x * y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$.

Если соответствующим точкам этого отображения приписать одинаковые координаты, то φ станет тождественным преобразованием и $x * y = x \times y$. Тогда канонические разложения в ряд уравнений локальных координатных луп тканей $CW(G_1)(*)$ и $C\overline{W}(G_2)(\times)$ в окрестности точки $P(0,0)$ вида (5.2) также будут совпадать:

$$x^i + y^i - \frac{1}{24} c^i_{(j|k|} c^k_{l)m} x^j x^l y^m + \frac{1}{12} c^i_{(k|j|} c^j_{m)l} x^l y^k y^m -$$

$$-\frac{1}{48} c^i_{(j|p|} c^p_{(k|q|} c^q_{l)m)} x^j x^m y^k y^l + \frac{1}{48} c^i_{(j|p|} c^p_{(k|q|} c^q_{l)m)} x^k x^l y^j y^m + o(\rho^5) =$$

$$= x^i + y^i - \frac{1}{24} \overline{c}^i_{(j|k|} \overline{c}^k_{l)m} x^j x^l y^m + \frac{1}{12} \overline{c}^i_{(k|j|} \overline{c}^j_{m)l} x^l y^k y^m -$$

$$-\frac{1}{48} \overline{c}^i_{(j|p|} \overline{c}^p_{(k|q|} \overline{c}^q_{l)m)} x^j x^m y^k y^l + \frac{1}{48} \overline{c}^i_{(j|p|} \overline{c}^p_{(k|q|} \overline{c}^q_{l)m)} x^k x^l y^j y^m + o(\rho^5),$$

здесь c^i_{jk} и $\overline{c}^i_{jk}$ – структурные константы групп G_1 и G_2.

Далее, основные тензоры координатных луп тканей $CW(G_1)(*)$ и $C\overline{W}(G_2)(\times)$ в окрестности точки $P(0,0)$ в этом случае тоже совпадают, т.е.

$$a^i_{jk} = \overline{a}^i_{jk},\ b^i_{jkl} = \overline{b}^i_{jkl},\ \underset{1}{C}{}^i_{jklm} = \underset{1}{\overline{C}}{}^i_{jklm},\ \underset{2}{C}{}^i_{jklm} = \underset{2}{\overline{C}}{}^i_{jklm}.$$

Используя предложение 5.6, получим (5.7).

Предложение 5.7. Группа G является нильпотентной высоты 1 тогда и только тогда, когда три-ткань $CW(G)$ является параллелизуемой.

Доказательство. Необходимость. Пусть группа G является нильпотентной высоты 1, т.е. выполняются равенства $[[\xi,\eta]\zeta] = 0$, или, по-другому, $c^i_{jm} c^m_{kl} = 0$. Тогда разложение (5.2) примет вид $c^i = x^i + y^i$. Таким образом, координатная лупа ткани $CW(G)$ станет абелевой группой, т.е. три-ткань $CW(G)$ является параллелизуемой.

Достаточность. Пусть три-ткань $CW(G)$ является параллелизуемой, т.е. $b^i_{jkl}=0$. Тогда по предложению 5.6 $c^i_{lm}c^m_{jk}=0$, или $[[\xi,\eta]\zeta]=0$. Это значит, что группа G является нильпотентной высоты 1.

Заметим, что достаточность предложения 5.7 была доказана в работе [5].

Рассмотрим конфигурацию Рейдемейстера R, изображенную на рис. 4. Как видно, вертикальный слой c зависит от вертикальных слоев a_1, a_2, b, т.е. на ткани $W(G)$ определена тернарная операция $c=<a_1,a_2,b>$, которую назовем тернарной сердцевиной.

Предложение 5.8. Уравнение тернарной сердцевины групповой три-ткани имеет вид

$$c=<a_1,a_2,b>=a_2b^{-1}a_1,\ a_1,a_2,b,c\in X. \tag{5.8}$$

Доказательство. Найдем уравнение тернарной сердцевины из условий замыкания фигуры R. Замкнутой фигуре $W(G)$, изображенной на рис. 4, отвечают равенства

$$a_1y_1=by_2,\ cy_1=a_2y_2.$$

Из первого равенства выразим y_2 и подставим во второе, получим $a_2b^{-1}a_1y_1=cy_1$. Отсюда находим уравнение тернарной сердцевины групповой три-ткани (5.8).

6. Сердцевина группы аффинных преобразований на прямой

Так как групповая три-ткань характеризуется замыканием всех достаточно малых конфигурации Рейдемейстера R (см. рис. 4), то она обозначается также R. Найдем уравнения сердцевины четырехмерной групповой три-ткани R_1, определяемой единственной неабелевой двумерной группой Ли

$$z^1=e^{x^2}y^1+x^1,\quad z^2=x^2+y^2. \tag{6.1}$$

Уравнения сердцевины $c=a*b$ этой ткани могут быть получены в виде (5.1):

$$c=ab^{-1}a.$$

Сначала найдем координаты обратного элемента y:

$$(y^1)^{-1}=-x^1e^{-x^2},\quad (y^2)^{-1}=-x^2.$$

Далее в равенствах (6.1) обозначим $z^1=c^1$, $z^2=c^2$, $x^1=(ab^{-1})^1$, $x^2=(ab^{-1})^2$, $y^1=b^1$, $y^2=b^2$ и подставим полученные выражения для $(y^1)^{-1}$ и $(y^2)^{-1}$. В результате подстановки и раскрытия скобок получим уравнения сердцевины в виде

$$c^1=a^1+(a^1-b^1)e^{a^2-b^2},\quad c^2=2a^2-b^2. \tag{6.2}$$

Согласно предложению 5.1 уравнения (6.2) определяют некоторую двумерную квазигруппу Бола, порождаемую рассматриваемой тканью R_1. Найдем структурные уравнения ткани CR_1 в виде (2.4). Продифференцируем (6.2) и положим

$$\underset{1}{\omega}^1 = (1+e^{a^2-b^2})da^1 + (a^1-b^1)e^{a^2-b^2}da^2, \ \underset{1}{\omega}^2 = 2da^2,$$

$$\underset{2}{\omega}^1 = -e^{a^2-b^2}db^1 - (a^1-b^1)e^{a^2-b^2}db^2, \ \underset{2}{\omega}^2 = -db^2. \tag{6.3}$$

Основные тензоры ткани CR_1 найдем по формулам (1.4), (1.5). В результате вычислений получим

$$a^1_{12} = \frac{1-e^{a^2-b^2}}{4\left(1+e^{a^2-b^2}\right)} = -a^1_{21}, \ b^1_{122} = -\frac{e^{a^2-b^2}}{2\left(1+e^{a^2-b^2}\right)^2} = -b^1_{212}. \tag{6.4}$$

Остальные компоненты этих тензоров равны нулю. Заметим, что на подмногообразии многообразия три-ткани CR_1, которое задается уравнением $a^2 = b^2$, тензор кручения ткани равен нулю.

Компоненты тензора кривизны $\tilde{R}^i_{jkl}$ найдем по формулам (2.5):

$$\tilde{R}^1_{212} = -\frac{1}{32} = -\tilde{R}^1_{221}, \tag{6.5}$$

а остальные компоненты равны нулю.

Далее найдем формы $\tilde{\omega}^i_j$, используя равенства (2.1) и формулы (1.6). Ненулевыми являются следующие формы:

$$\tilde{\omega}^1_1 = -\frac{1+3e^{a^2-b^2}}{4\left(1+e^{a^2-b^2}\right)}\underset{1}{\omega}^2 - \frac{e^{a^2-b^2}}{1+e^{a^2-b^2}}\underset{2}{\omega}^2,$$

$$\tilde{\omega}^1_2 = -\frac{1+3e^{a^2-b^2}}{4\left(1+e^{a^2-b^2}\right)}\underset{1}{\omega}^1 - \frac{1}{2}\underset{2}{\omega}^1 + \frac{e^{2a^2-2b^2}}{2\left(1+e^{a^2-b^2}\right)}(a^1-b^1)(\underset{1}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^2). \tag{6.6}$$

С помощью (6.3)–(6.6), запишем структурные уравнения ткани CR_1 в виде

$$d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^1_1 + \underset{1}{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^1_2, \quad d\underset{1}{\omega}^2 = 0,$$

$$d\underset{2}{\omega}^1 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^1_1 + \underset{2}{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^1_2 - \frac{1-e^{a^2-b^2}}{4\left(1+e^{a^2-b^2}\right)}\left(\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{3}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{3}{\omega}^1\right), \quad d\underset{2}{\omega}^2 = 0,$$

$$d\tilde{\omega}_1^1 = 0, \quad d\tilde{\omega}_2^1 = \tilde{\omega}_2^1 \wedge \tilde{\omega}_1^1 - \frac{1}{16}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2.$$

7. Сердцевина группы Гейзенберга

Рассмотрим шестимерную групповую три-ткань R_2, которая определяется группой Гейзенберга:

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z^3 = x^3 + y^3 + x^1 y^2.$$

По формуле (5.1) найдем уравнения сердцевины CR_2:

$$c^1 = 2a^1 - b^1, \quad c^2 = 2a^2 - b^2, \quad c^3 = 2a^3 - b^3 + a^1a^2 - a^1b^2 - a^2b^1 + b^1b^2. \quad (7.1)$$

Структурные уравнения ткани CR_2 найдем в виде (2.4). Дифференцируя (7.1), найдем

$$\underset{1}{\omega}^1 = 2da^1, \ \underset{1}{\omega}^2 = 2da^2, \ \underset{1}{\omega}^3 = (a^2 - b^2)da^1 + (a^1 - b^1)da^2 + 2da^3,$$

$$\underset{2}{\omega}^1 = -db^1, \ \underset{2}{\omega}^2 = -db^2, \ \underset{2}{\omega}^3 = (b^2 - a^2)db^1 + (b^1 - a^1)db^2 - db^3.$$

Основные тензоры три-ткани CR_2 и формы $\tilde{\omega}_j^i$ имеют вид

$$a_{jk}^i = 0, \quad b_{jkl}^i = 0, \quad \tilde{R}_{jkl}^i = 0, \quad i,j,k,l = \overline{1,3}.$$

$$\tilde{\omega}_1^3 = -\frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^2\right), \ \tilde{\omega}_2^3 = -\frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1\right).$$

Теперь запишем структурные уравнения ткани CR_2:

$$d\underset{1}{\omega}^1 = d\underset{1}{\omega}^2 = 0, \ d\underset{1}{\omega}^3 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}_1^3 + \underset{1}{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}_2^3,$$

$$d\underset{2}{\omega}^1 = d\underset{2}{\omega}^2 = 0, \ d\underset{2}{\omega}^3 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}_1^3 + \underset{2}{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}_2^3, \ d\omega_j^i = 0, \ i,j = \overline{1,3}.$$

Утверждение 7.1. Координатная квазигруппа левой три-ткани Бола CR_2 изотопна абелевой группе.

Доказательство. Так как тензоры кручения и кривизны левой три-ткани Бола CR_2 равны нулю, то эта ткань является параллелизуемой, а ее координатная квазигруппа изотопна абелевой группе. Покажем это непосредственно. Полагая

$$2a^1 \to \tilde{a}^1, \ 2a^2 \to \tilde{a}^2, \ 2a^3 + a^1a^2 \to \tilde{a}^3,$$

$$-b^1 \to \tilde{b}^1, \ -b^2 \to \tilde{b}^2, \ -b^3 + b^1b^2 \to \tilde{b}^3,$$

приведем уравнения (7.1) к виду

$$\tilde{c}^1 = \tilde{a}^1 + \tilde{b}^1, \quad \tilde{c}^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2, \quad \tilde{c}^3 = \tilde{a}^3 + \tilde{b}^3 + \frac{1}{2}a^1b^2 + \frac{1}{2}a^2b^1.$$

Далее применим изотопическое преобразование

$$\tilde{a}^3 - \frac{1}{2}\tilde{a}^1\tilde{a}^2 \to \overline{a}^3,\ \tilde{b}^3 - \frac{1}{2}\tilde{b}^1\tilde{b}^2 \to \overline{b}^3,\ \tilde{c}^3 - \frac{1}{2}\tilde{c}^1\tilde{c}^2 \to \overline{c}^3.$$

В результате получим уравнения абелевой группы:

$$\tilde{c}^1 = \tilde{a}^1 + \tilde{b}^1, \quad \tilde{c}^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2, \quad \overline{c}^3 = \overline{a}^3 + \overline{b}^3.$$

Так как квазигруппа левой три-ткани Бола CR_2 изотопна абелевой группе, то по теореме Алберта сама является группой.

Список литературы

1. **Белоусов, В. Д.** Сердцевина лупы Бола / В. Д. Белоусов // Исследования по общей алгебре. – Кишинев, 1965. – С. 53–65.
2. **Белоусов, В. Д.** Основы теории квазигрупп и луп / В. Д. Белоусов. – М. : Наука, 1967. – 223 с.
3. **Толстихина, Г. А.** О три-ткани, определяемой сердцевиной левой три-ткани Бола / Г. А. Толстихина, А. М. Шелехов // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 12. – С. 83–88.
4. **Шелехов, А. М.** О структурных уравнениях три-ткани, определяемой сердцевиной левой три-ткани Бола / А. М. Шелехов, Г. А. Толстихина // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 8. – С. 75–84.
5. **Гегамян, Г. Д.** Левые три-ткани Бола с тривиальной сердцевиной : дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 / Гегамян Г. Д. ; Гос. инженер. ун-т Армении (Политехник). – Ереван, 2013. – 180 с.
6. **Акивис, М. А.** Многомерные три-ткани и их приложения : моногр. / М. А. Акивис, А. М. Шелехов. – Тверь : Изд-во ТвГУ, 2010. – 308 с.
7. **Толстихина, Г. А.** Обобщенная левая три-ткань Бола $B_l(\rho, r, r)$ как фактор-ткань левой ткани Бола $B_l(r, r, r)$ / Г. А. Толстихина // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика. – 2011. – Вып. 2 (21). – С. 117–134.
8. **Толстихина, Г. А.** О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $B_l(p, q, q)$ / Г. А. Толстихина // Геометрія, топологія та їх застосування : зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 2. – С. 247–255.
9. **Лоос, О.** Симметрические пространства / О. Лоос. – М. : Наука, 1985. – 207 с.
10. **Сабинин, Л. В.** Теория гладких луп Бола / Л. В. Сабинин, П. О. Михеев. – М. : Изд-во РУДН, 1985. – 80 с.
11. **Картан, Э.** Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан. – М. : ИИЛ, 1949. – 119 с.
12. **Дынкин, Е. Б.** Вычисление коэффициентов в формуле Campbell'а-Hausdorff'а / Е. Б. Дынкин // Доклады Академии наук СССР. – 1947. – Т. 51, № 4. – С. 323–326.
13. **Михеева, А. А.** О шестимерных левых три-тканях Бола с общей сердцевиной / А. А. Михеева, Г. А. Толстихина // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 10. – С. 1–12.

References

1. Belousov V. D. *Issledovaniya po obshchey algebra* [Research in general algebra]. Kishinev, 1965, pp. 53–65.
2. Belousov V. D. *Osnovy teorii kvazigrupp i lup* [Basic theories of quasigroups and loops]. Moscow: Nauka, 1967, 223 p.

3. Tolstikhina G. A., Shelekhov A. M. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2014, no. 12, pp. 83–88.
4. Shelekhov A. M., Tolstikhina G. A. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2015, no. 8, pp. 75–84.
5. Gegamyan G. D. *Levye tri-tkani Bola s trivial'noy serdtsevinoy: dis. kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.04* [Left Bol three-webs with trivial cores: dissertation to apply for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences]. Gos. inzhener. un-t Armenii (Politekhnik). Erevan, 2013, 180 p.
6. Akivis M. A., Shelekhov A. M. *Mnogomernye tri-tkani i ikh prilozheniya: monogr.* [Multidimensional three-webs and applications thereof: onograph]. Tver: Izd-vo TvGU, 2010, 308 p.
7. Tolstikhina G. A. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Prikladnaya matematika* [Bulletin of Tver State University. Series: Applied mathematics]. 2011, iss. 2 (21), pp. 117–134.
8. Tolstikhina G. A. *Geometriya, topologiya ta ikh zastosuvannya: zb. prats' In-tu matematiki NAN Ukraini* [Geometry, topology and applications thereof: proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine]. 2009, vol. 6, no. 2, pp. 247–255.
9. Loos O. *Simmetricheskie prostranstva* [Symmetric spaces]. Moscow: Nauka, 1985, 207 p.
10. Sabinin L. V., Mikheev P. O. *Teoriya gladkikh lup Bola* [Lectures on the theory of smooth Bol loops]. Moscow: Izd-vo RUDN, 1985, 80 p.
11. Kartan E. *Geometriya grupp Li i simmetricheskie prostranstva* [Geometry of Lie groups and symmetric spaces]. Moscow: IIL, 1949, 119 p.
12. Dynkin E. B. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]. 1947, vol. 51, no. 4, pp. 323–326.
13. Mikheeva A. A., Tolstikhina G. A. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2014, no. 10, pp. 1–12.

Михеева Анна Александровна
аспирант, Тверской государственный университет (Россия, г. Тверь, ул. Желябова, 33)

Mikheeva Anna Aleksandrovna
Postgraduate student, Tver State University, (33 Zhelyabova street, Tver Russia)

E-mail: heathjensen@yandex.ru

УДК 514.763.7

Михеева, А. А.

О сердцевине групповой три-ткани / А. А. Михеева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 3 (39). – С. 31–55. DOI 10.21685/2072-3040-2016-3-3